



KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH

GESELLSCHAFT MIT BESCHRÄNKTER HAFTUNG

Zentralinstitut für Reaktorexperimente

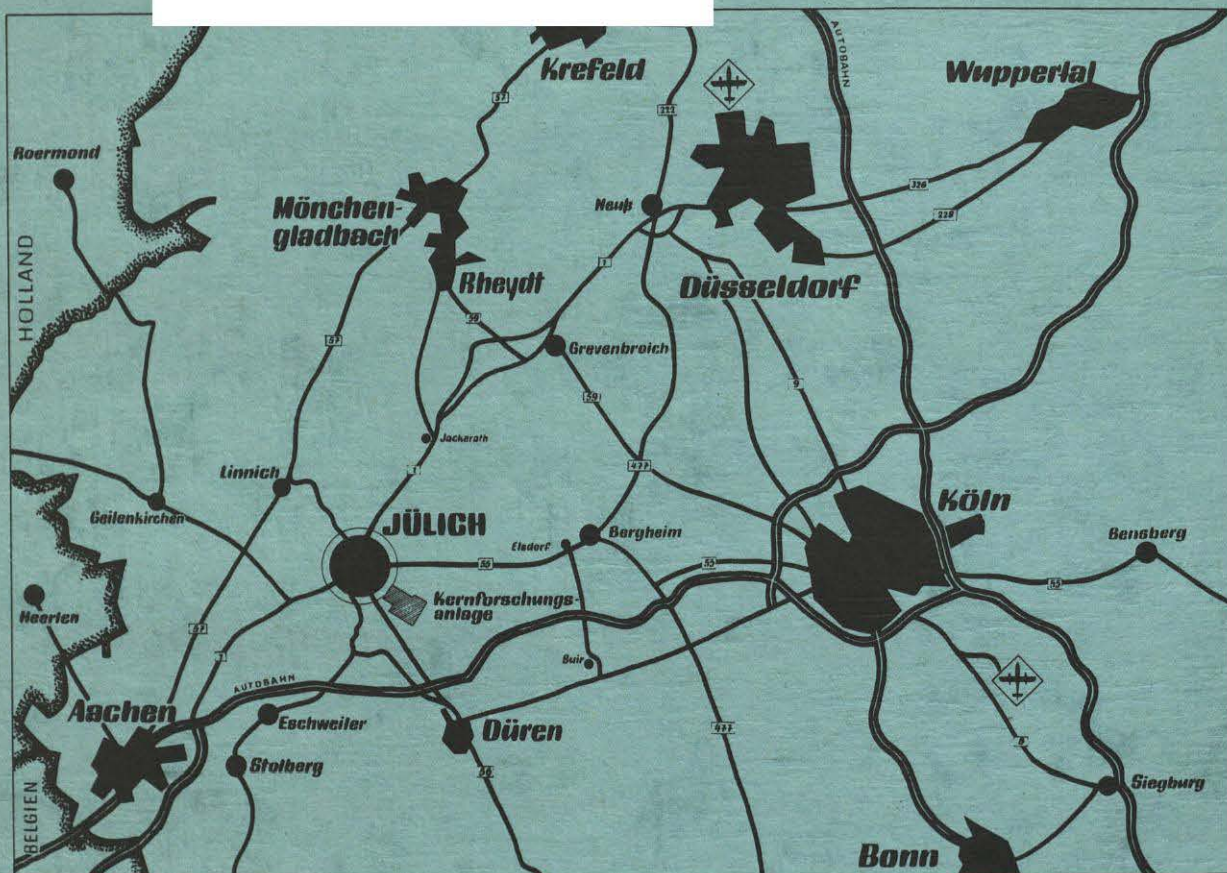
**Über den Beitrag der Wärmestrahlung
zur Wärmeleitung von Kugelschüttungen
in stagnierenden Medien**

von

H. J. Leyers

**Jül - 906 - RX
Dezember 1972**

Als Manuskript gedruckt



Berichte der Kernforschungsanlage Jülich - Nr. 906

Zentralinstitut für Reaktorexperimente Jül - 906 - RX

Dok.: Thermal Radiation - Pebble Bed
 Thermal Conductivity - Pebble Bed
 Pebble Bed - Thermal Radiation
 Pebble Bed - Thermal Conductivity

Im Tausch zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich GmbH,
 Jülich, Bundesrepublik Deutschland

Über den Beitrag der Wärmestrahlung zur Wärmeleitung von Kugelschüttungen in stagnierenden Medien

von

H. J. Leyers

Zusammenfassung:

Es wird der Wärmetransport in Kugelschüttungen behandelt, der durch Wärmeleitung und insbesondere durch Wärmestrahlung hervorgerufen wird. Für die einzelnen Beiträge zum Wärmetransport werden Gleichungen angegeben, wobei speziell auf den Beitrag der Wärmestrahlung näher eingegangen wird. Es wird gezeigt, daß letzterer unter der Annahme, daß das Emissionsvermögen des Mediums ϵ_M vernachlässigt werden kann, formelmäßig ausgedrückt werden kann durch Angabe eines effektiven Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten λ_{eff} bei Kenntnis von 3 Parametern, die die Schüttung beschreiben, nämlich: 1. das Emissionsvermögen der Kugeln ϵ , 2. der Durchmesser der Kugeln ϕ und 3. die Packungsdichte der Schüttung p , (siehe die Gleichungen: 1, 4a und 15). Der Geltungsbereich der angegebenen Gleichungen ist begrenzt auf hinreichend kleine Temperaturdifferenzen bezogen auf die Einheitszelle der Schüttung. Es ist ferner angenommen, daß sich die Beiträge der Wärmeleitung und Wärmestrahlung additiv zusammensetzen, wobei im allgemeinen der Wärmestrahlungsterm als klein gegenüber dem Wärmeleitungsterm betrachtet wird. Für den Fall, daß die beiden Terme vergleichbar sind, wird eine zusätzliche Korrektur angegeben, Gleichung (11).

Einleitung:

In einer früheren Arbeit ⁽¹⁾ wurde vom Verfasser gezeigt, daß der Beitrag der reinen Wärmeleitung zur Wärmeleitung einer Kugelschüttung beschrieben werden kann bei Kenntnis von 2 Parametern, durch die die Schüttung charakterisiert ist, nämlich: 1. das Verhältnis der Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten der Kugeln und des Mediums ($\Lambda = \frac{\lambda_K}{\lambda_M}$) und 2. die Packungsdichte ($p = \text{Kugelvolumen durch Gesamtvolumen}$). Im folgenden wollen wir den Beitrag der Wärmestrahlung zur Wärmeleitung einer derartigen Kugelschüttung betrachten, wobei wir voraussetzen, daß den Kugeln ein Emissionsvermögen ϵ eines grauen Strahlers zugeschrieben werden kann und das Emissionsvermögen des Mediums vernachlässigt werden darf. Wir setzen im weiteren an, daß der Wärmefluss \dot{Q} bezogen auf die Einheitszelle der Schüttung sich additiv zusammensetzt aus einem Leitungsterm \dot{Q}_{Leitung} und einem Strahlungsterm $\dot{Q}_{\text{Strahlung}}$, also:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_{\text{Leitung}} + \dot{Q}_{\text{Strahlung}}$$

Hierbei soll der Leitungsterm durch Gleichung 9 der zitierten Arbeit gegeben sein, was sicherlich zutrifft, solange $\dot{Q}_{\text{Strahlung}}$ genügend klein gegenüber \dot{Q}_{Leitung} bleibt. Bei der Berechnung des Strahlungstermes sind 2 Komponenten zu berücksichtigen, nämlich 1. der Anteil, der sich aus dem Strahlungsaustausch zwischen einzelnen Kugeln (\dot{Q}_{K-K}) ergibt und 2. der Anteil, der bedingt ist durch Wärmestrahlung der Kugel-Zwischenräume (voids) \dot{Q}_{V-V} .

Fassen wir die bisherigen Ausführungen zusammen, so können wir damit formal der Kugelschüttung einen effektiven Wärmeleitkoeffizienten (λ_{eff}) zuordnen, der definiert ist durch die Gleichung:

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda_{\text{Leitung}} + \lambda_{K-K} + \lambda_{v-v} = \frac{\dot{Q}_{\text{Leitung}} + \dot{Q}_{K-K} + \dot{Q}_{v-v}}{F_z \cdot \frac{dT}{dx}} ; \quad (1)$$

(F_z = Grundfläche der Einheitszelle,

$\frac{dT}{dx}$ = Temperaturgradient (in Richtung des Wärmestromes)).

Wie bereits angeführt, soll sich λ_{Leitung} aus Gleichung 9 der zitierten Arbeit (siehe: Fußnote) ergeben, es bleibt die Berechnung von λ_{K-K} und λ_{v-v} übrig, der wir uns im folgenden zuwenden.

Fußnote: In der zitierten Arbeit wurde folgender Ausdruck abgeleitet, (Gleichung 9):

$$\lambda_{\text{Leitung}} = \left[1 + A \cdot \left(\frac{\Lambda - 1}{\Lambda} \right)^2 \ln \Lambda \right] \cdot \left[1 + 2 \left(1 - \frac{1}{\Lambda^{0,3}} \right) \left(\frac{p}{p_0} - 1 \right) \right] \cdot \lambda_0^1$$

hierbei bedeutet:

$$A = \frac{p_0^3}{\sqrt{3}} \left[8,4476 \frac{p}{p_0} - 2,9522 \left(\frac{p}{p_0} \right)^2 - 4,4954 \right] ,$$

$$p_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$\lambda_0^1 = \lambda_M \left\{ 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \frac{\Lambda}{\Lambda - 1} \left[\frac{\Lambda}{\Lambda - 1} \ln \Lambda - 1 \right] \right\} .$$

Berechnung von λ_{K-K}

Wir berechnen zunächst mit Hilfe der "lumped-system Approximation", wie bei Love ⁽²⁾ beschrieben, den Wärmeaustausch zwischen 2 sich berührenden Kugeln, u.z. mit den Annahmen, (siehe Figur 1):

- a) die betrachteten Kugeln (K_1, K_2) sind geometrisch und stofflich gleich.
- b) es sind graue Strahler (Emissionsvermögen: ϵ)
- c) die Temperaturen der Kugeloberflächen sind konstant, (T_1, T_2)
- d) die Kugeln werden durch eine fiktive adiabatische Wand mit einem Emissionsvermögen: $\epsilon=0$ (Reflexionsvermögen: $\rho=1$) abgeschlossen.

Der Wärmestrom von Kugel 1 nach Kugel 2 ergibt sich in diesem Fall zu:

$$\dot{Q}_{K_1 \rightarrow K_2} = \frac{\pi}{2} \phi^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1+F_{12}}{1+(1-\epsilon)F_{12}} \cdot \epsilon \cdot \sigma \cdot (T_1^4 - T_2^4); \quad (2)$$

hierbei sind im weiteren eingeführt die Größen:

ϕ = Kugeldurchmesser

σ = $5,67 \cdot 10^{-12}$ W/cm²K⁴ = Stefan-Boltzmann-Konstante

F_{12} = Strahlungswinkelverhältnis (view factor)

Definitionsgemäß ist:

$$F_{12} = \frac{1}{F_1} \cdot \int_{F_1} \int_{F_2} \frac{\cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2}{\pi r^2} \cdot dF_1 \cdot dF_2; \quad (3)$$

(Bezeichnungen siehe Figur 1)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} F_{dF_1 \rightarrow F_2} \cdot \sin \theta_1 \cdot d\theta_1 \quad ; \quad (3a)$$

$$\text{mit:} \quad F_{dF_1 \rightarrow F_2} = \frac{1}{\pi} \int_{F_2} \frac{\cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2}{r^2} dF_2 \quad ; \quad (3b)$$

Für das Strahlungswinkelverhältnis von einem Flächenelement der Kugel 1 auf die Kugel 2 ($F_{dF_1 \rightarrow F_2}$) als Funktion von θ_1 ergibt sich explizit, (vergleiche Figur 1):

$$F_{dF_1 \rightarrow F_2} = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\frac{A}{\rho^2} \cdot f(\theta_1) - \frac{1}{\rho^2} \cdot \sqrt{(\rho^2 - 1)(1 - \rho^2 A^2)} + \right. \\ \left. + \arcsin \frac{1}{\rho} \cdot \sqrt{\frac{1 - \rho^2 A^2}{1 - A^2}} - \frac{A}{\rho^2} \left(\arcsin \sqrt{\frac{1 - \rho^2 A^2}{1 - A^2}} \right) \right] ; \quad (3c)$$

$$\text{mit:} \quad f(\theta_1) = \pi \quad \text{für} \quad \theta_1 \leq \frac{\pi}{3} \\ = 0 \quad \text{für} \quad \theta_1 > \frac{\pi}{3}$$

und den Abkürzungen:

$$\rho^2 = 5 - 4 \cos \theta_1$$

$$\rho^2 A^2 = 1 - 4 \cos \theta_1 \cdot (1 - \cos \theta_1)$$

Wie in Figur 2 ausgeführt ergibt sich mit (3c) das Strahlungswinkelverhältnis $F_{1,2}$ nach (3a) durch graphische Inte-

gration zu:

$$F_{1,2} = 0,1504$$

Einsetzen von $F_{1,2}$ in Gleichung (2) ergibt:

$$\dot{Q}_{K_1 \rightarrow K_2} = \frac{\pi}{4} \phi^2 \cdot \frac{\epsilon \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{1 - 0,131 \epsilon}$$

und mit der Entwicklung:

$$T_1^4 - T_2^4 \approx 4 \cdot T^3 \cdot \Delta T \quad \text{bei } T_1 = T_2 + \Delta T = T + \Delta T$$

erhalten wir schliesslich:

$$\dot{Q}_{K_1 \rightarrow K_2} = \frac{\epsilon}{1 - 0,131 \epsilon} \pi \phi^2 \cdot \sigma T^3 \Delta T ; \quad (2a)$$

Aus Figur 2 ist im weiteren zu entnehmen, daß der Beitrag der Randzonen ($\theta_1 \sim \frac{\pi}{2}$) auf $F_{1,2}$, wie erwartet, klein ist. D.h. in einer Kugelschüttung wird der Einfluß durch die geometrische Anordnung von Nachbarkugeln auf den Strahlungsaustausch zweier Kugeln bei unserer Betrachtungsweise vernachlässigbar sein. Wir können somit ansetzen, daß der Wärmeaustausch infolge Strahlung von Kugel zu Kugel pro Berührungspunkt gegeben ist und nach Gleichung (2a) berechnet werden kann, wir erhalten also:

$$\dot{Q}_{K-K} = N \cdot \dot{Q}_{K_1 \rightarrow K_2} = N \cdot \frac{\epsilon}{1 - 0,131 \epsilon} \cdot \pi \phi^2 \cdot \sigma T^3 \Delta T ; \quad (2b)$$

(N = Anzahl Berührungspunkte pro Einheitszelle, wir übernehmen aus der Literatur (1) die Werte: N=1 für die loseste

Kugelpackung und $N=3$ für die dichteste Kugelpackung). Entsprechend Gleichung (1) ergibt sich damit der Wärmeleitfähigkeitskoeffizient λ_{K-K} zu:

$$\lambda_{K-K} = \frac{\epsilon}{1-0,131 \epsilon} \cdot N \cdot \pi \phi^2 \cdot \sigma T^3 \cdot \Delta T \cdot \frac{1}{F_z \cdot \frac{dT}{dx}}$$

Ersetzen wir ΔT durch $\Delta T = \Delta x \cdot \frac{dT}{dx}$ (Δx = Höhe der Einheitszelle), so erhalten wir:

$$\lambda_{K-K} = \frac{\epsilon}{1-0,131 \epsilon} \cdot \sigma T^3 \cdot \Delta T \cdot \pi \phi^2 \cdot N \cdot \frac{\Delta x}{F_z} \quad (4)$$

Es erscheint zweckmäßig (4) in folgende Form umzuschreiben:

$$\lambda_{K-K} = \frac{2-\epsilon}{1-0,131 \epsilon} \cdot \lambda_{or} \cdot f_K(v) \quad (4a)$$

hierbei haben wir 2 Faktoren eingeführt, nämlich:

$$1.) \lambda_{or} = 4\sigma T^3 \cdot \phi \cdot \frac{\epsilon}{2-\epsilon}; \quad (5a)$$

(Wie man zeigen kann, ist dieser Faktor äquivalent dem effektiven Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten von unendlich ausgedehnten parallelen Wänden mit dem Emissionsvermögen ϵ im Abstand ϕ).

$$\text{und } 2.) f_K(v) = \frac{\pi}{4} \cdot \phi \cdot N \cdot \frac{\Delta x}{F_z}.$$

Mit dem letzteren Faktor machen wir den Versuch, den Einfluß der Packungsdichte p (bzw. Voidfaktor v , es ist: $v = 1-p$) der

Kugelschüttung zu erfassen. Es gilt streng für die loseste K.-Packung (Index: 1):

$$f_K(v_1) = \frac{\pi}{4} = (1-v_1) \cdot \frac{3}{2} N_1 \quad (a)$$

und für die dichteste K.-Packung (Index: 2):

$$f_K(v_2) = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{2} = (1-v_2) \cdot N_2 \quad (b)$$

Der einfachste Ansatz, der beiden Bedingungen (a) und (b) genügt, ist:

$$f_K(v) = (1-v) \cdot \frac{3}{2} \left(1 + \frac{N-1}{2}\right), \quad (5b)$$

Im Rahmen unserer Näherung scheint es nahe zu liegen, diesen Ansatz (5b) für Zwischenwerte von v beizubehalten.

(Anmerkung: die Anzahl Berührungspunkte in Funktion von v ist nur näherungsweise bekannt, z.B. nach Smith (3), für Anwendungen in der Praxis setzen wir lineare Abhängigkeit von $(1-v)$ an).

Wie aus dem bisherigen Rechengang hervorgeht, gilt Gleichung (4a) um so mehr, je besser die Beziehung: $\lambda_{K-K} \ll \lambda_K$ erfüllt ist, (λ_K = Wärmeleitfähigkeitskoeffizient der Kugeln). Sobald λ_{K-K} nicht mehr klein gegen λ_K ist, d.h. für den Fall, daß der Temperaturabfall in den Kugeln nicht mehr vernachlässigbar ist, wird Gleichung (4a) den tatsächlichen Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten λ'_{K-K} überschätzen.

Die Wärmeleitung in den Kugeln kann durch einen Korrekturfaktor $K = \frac{\lambda'_{K-K}}{\lambda_{K-K}}$ wie folgt berücksichtigt werden. Hierbei betrachten wir den Fall der losesten Kugelschüttung und nehmen die Wärmeleitung in der Einheitszelle eindimensional an. Definitionsgemäß setzen wir an:

$$\dot{Q}_{K-K} = \lambda'_{K-K} \cdot \frac{\Delta T}{\phi} \cdot F_z = \lambda_{K-K} \cdot \frac{\Delta T'}{\phi} \cdot F_z$$

↔

$$\text{also: } K = \frac{\lambda'_{K-K}}{\lambda_{K-K}} = \frac{\Delta T'}{\Delta T} \quad ; \quad (6)$$

Um $\Delta T'$ berechnen zu können, ordnen wir dem Wärmestrom \dot{Q}_{K-K} einen effektiven Gas-Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten λ'_G derart zu, daß entsprechend dem Rechengang vom Anhang 1 (Betrachtung nur der Innenfläche) folgende Relation besteht:

$$\frac{\lambda'_{K-K}}{\lambda'_G} = \frac{2\Lambda'}{\Lambda'-1} \cdot \left[\frac{\Lambda'}{\Lambda'-1} \cdot \ln \Lambda' - 1 \right] = f(\Lambda') \quad ; \quad (7)$$

$$\text{mit: } \Lambda' = \frac{\lambda_K}{\lambda'_G}$$

Damit gelten im weiteren formal die Gleichungen:

$$\lambda'_{K-K} \cdot \frac{\Delta T}{\phi} = \lambda_K \frac{\Delta T - \Delta T'}{x} = \lambda'_G \cdot \frac{\Delta T'}{\phi - x} \quad , \quad (8)$$

wobei x irgendeinen Wert zwischen $0 > x > \phi$ hat.

Aus den Gleichungen (6) und (8) folgt nach einfacher Rechnung:

$$K = \frac{\lambda'_{K-K}}{\lambda_{K-K}} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{K-K}}{\lambda_K} - \frac{\lambda'_G}{\lambda_K}}, \quad (9)$$

($\lambda'_G < \lambda_K$)

Der Quotient $B = \frac{\lambda'_G}{\lambda_K} = \frac{1}{A'}$ ergibt sich aus den Gleichungen (7) und (9) als

Funktion von $\frac{\lambda_{K-K}}{\lambda_K}$, es ist implizit:

$$\frac{\lambda_{K-K}}{\lambda_K} = f(B) = (1-B) \cdot \frac{C}{1-C} \quad (10)$$

$$\text{mit } C = \frac{2B}{(1-B)} \cdot \left[\frac{1}{1-B} \cdot \ln \frac{1}{B} - 1 \right]$$

Der Korrekturfaktor K (Gleichung 9) ist damit ebenfalls als Funktion von $\frac{\lambda_{K-K}}{\lambda_K}$ erklärt. Die sich ergebenden Werte von K sind graphisch in Figur 3 aufgetragen.

Zusammenfassend erhalten wir mit Gleichung (4a) also für den tatsächlichen Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten λ'_{K-K} unter Beachtung der Gleichungen (5a, 5b und 9) und K aus Figur 3:

$$\lambda'_{K-K} = K \cdot \lambda_{K-K} = K \cdot \lambda_{or} \cdot f_K(v) \cdot \frac{2-\epsilon}{1-0,131 \epsilon} \quad (11)$$

Berechnung von λ_{v-v}

Wie Sparrow (4) gezeigt hat, ergibt sich der Wärmefluss \dot{Q} aus einem Kugelhohlraum, dessen Wand konstante Temperatur (T) und ein Emissionsvermögen (ϵ) hat, bei einer Austrittsfläche F (siehe Figur 4) zu:

$$\dot{Q} = F \cdot \bar{\epsilon} \cdot \sigma T^4, \quad (12)$$

$$\text{mit: } \frac{1}{\bar{\epsilon}} = 1 + \frac{1-\epsilon}{2\epsilon} \cdot (1-\cos \phi),$$

(ϕ siehe Figur 4)

Bei der Berechnung von \dot{Q}_{v-v} in unserem Fall treffen wir die Annahme, daß die Zwischenräume der Einheitszelle näherungsweise durch eine derartige Hohlkugel mit einer Austrittsfläche F_v , die der freien Grundfläche der Einheitszelle entspricht, ersetzt werden darf. Mit Gleichung (12) ergibt sich damit für \dot{Q}_{v-v} :

$$\dot{Q}_{v-v} = F_v \cdot \bar{\epsilon} \cdot \sigma (T_1^4 - T_2^4), \quad (13)$$

$$\text{mit: } \frac{1}{\bar{\epsilon}} = 1 + \frac{1-\epsilon}{2\epsilon} \cdot 4v, \quad (13a)$$

In Gleichung (13a) wurde hierbei der Faktor $(1-\cos \phi)$ durch einen entsprechenden vom Voidfaktor v abhängigen Faktor: $4v$ ersetzt. Diese Zuordnung zwischen ϕ und v , die nur näherungsweise gilt, ergibt sich aus der Betrachtung der 2 Grenzfälle:

- 1.) $\bar{\epsilon} = 1$ für $\phi=0$ und $v=0$
 und 2.) $\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon}{2-\epsilon}$ für $\phi=\pi$ und $v=1$

Mit Gleichung (13) ergibt sich für den Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten λ_{v-v} , den wir mit Gleichung (1) eingeführt haben, somit:

$$\lambda_{v-v} = \frac{F_v \cdot \bar{\epsilon} \cdot \sigma (T_1^4 - T_2^4)}{F_z \cdot \frac{dT}{dx}} \quad (14)$$

Entsprechend den Ausführungen und Bezeichnungen des vorangegangenen Abschnittes können wir (14) umschreiben und erhalten:

$$\begin{aligned} \lambda_{v-v} &= 4\sigma T^3 \cdot \Delta T \cdot \bar{\epsilon} \cdot \frac{F_v}{F_z \cdot \frac{dT}{dx}} \\ &= \lambda_{or} \cdot \frac{2-\epsilon}{\epsilon} \cdot \bar{\epsilon} \cdot \frac{F_v \cdot \Delta x}{F_z \cdot \phi} , \quad (\lambda_{or} \text{ siehe Gl. 5a}) \end{aligned}$$

Gleichung (13a) eingesetzt und bei Einführung des Faktors:

$$f_v(v) = \frac{F_v \cdot \Delta x}{F_z \cdot \phi} \text{ erhalten wir schliesslich:}$$

$$\lambda_{v-v} = \lambda_{or} \cdot \frac{2-\epsilon}{\epsilon+2v(1-\epsilon)} \cdot f_v(v) , \quad (15)$$

Der Faktor $f_v(v)$ ergibt sich explizit zu:

$$\text{für die loseste Kugelpackung: } f_v(v_1) = \frac{3}{2}v_1 - \frac{1}{2} = 0,216$$

$$\begin{aligned} \text{für die dichteste Kugelpackung: } f_v(v_2) &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{F_v}{\phi^2} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot 0,020726 = 0,0391 \end{aligned}$$

$$\text{für } v=1 \qquad \qquad \qquad : f_v(1) = 1$$

Der einfachste allgemeine Ansatz, der diese 3 Bedingungen näherungsweise erfüllt, ist:

$$f_v(v) = \frac{v}{1 + \frac{N(N+1)}{2}}, \qquad (16)$$

Die Berechnung nach (16) ergibt für den Fall der losesten K.-Packung einen Fehler von 9,4 % und für den Fall der dichtesten K.-Packung einen Fehler von -4,9 %, also Abweichungen, die im Rahmen unserer Betrachtungsweise zulässig sind.

Schlußbemerkung

Wie aus den vorangegangenen Ausführungen hervorgeht, kann nur näherungsweise der Strahlungsanteil zur Wärmeleitung von Kugelschüttungen durch die Gleichungen (1, 11 und 15) wiedergegeben werden. Hierbei kann jedoch abgeschätzt werden, daß der gesamte Fehler unter 20 % bleibt. Der angegebene Fehler ergibt sich, wie gezeigt wurde, im wesentlichen infolge des Einflusses der Packungsdichte. Es bleibt daher zum Schluß der Wunsch offen, daß experimentelle Bestimmungen der Wärmeleitung von Kugelschüttungen unsere theoretischen Ansätze erhärten mögen.

Literatur:

- (1) Leyers, H.J., Chemie Ingenieur Technik, 44 (1972)
S. 1109-1115.
- (2) Tom I. Love, Radiative Heat Transfer, 1968, p. 61
Charles E. Merrill Publishing Company, Columbus, Ohio.
- (3) O.W.Smith, P.D. Foote, P.F. Busang: Physical Review 34,
p. 1271 (1929).
- (4) E.M. Sparrow, V.K. Jonsson: Journal of heat transfer
Vol. 84 p. 188-189 (1962).

Abbildungen:

- Figur 1: Strahlungsaustausch zwischen Kugel K_1 (Temperatur T_1) und Kugel 2 (Temperatur T_2).
- Figur 2: Strahlungswinkelverhältnis F_{12} zwischen 2 sich berührenden Kugeln.
- Figur 3: Korrekturfaktor $K = \frac{\lambda'_{K-K}}{\lambda_{K-K}}$ in Funktion von $\frac{\lambda_{K-K}}{\lambda_K}$
- Figur 4: Wärmestrahlung aus einem Kugelhohlraum mit kreisförmiger Öffnung, (Wandtemperatur T , Emissionsvermögen ϵ).
- Figur 5: Einheitszelle für die loseste Kugelpackung,
A: Perspektivische Darstellung
B: Seitenriss
C: Grundriss

Anhang 1: Berechnung des mittleren Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten λ_o^1 für den Fall der losesten Kugelpackung bei eindimensionalem Wärmefluss

Für die betrachtete Einheitszelle (Figur 5) und bei eindimensionalem Wärmefluss, (d.h. $\text{grad } T \equiv \frac{dT}{dz}$) ergibt sich definitionsgemäß der effektive Wärmeleitkoeffizient λ_o^1 aus:

$$\dot{Q} = \int_F \dot{q} \, dF = - \lambda_o^1 \cdot F \cdot \overline{\frac{dT}{dz}}$$

$$\text{mit: } \dot{q} = -\lambda \frac{dT}{dz} \cdot dF$$

Es ist also mit: $\overline{\frac{dT}{dz}} = \frac{\Delta T}{R}$ (siehe Figur 5):

$$\lambda_o^1 = \frac{-1}{4R\Delta T} \left(\int_{F_i} \dot{q} \, dF + \int_{F_a} \dot{q} \, dF \right) \quad (a)$$

F_i = Innenfläche

F_a = Außenfläche

Aus Figur 5 ist ferner zu ersehen, daß im Bereich der Außenfläche (Medium) gilt:

$$\dot{q}_a = -\lambda_M \cdot \frac{\Delta T}{R} \cdot dF \quad (b)$$

und im Bereich der Innenfläche (Kugel und Medium):

$$\dot{q}_i = -\lambda_K \cdot \frac{T}{z} \cdot dF \quad (c1)$$

oder

$$\dot{q}_i = -\lambda_M \cdot \frac{\Delta T - T_z}{R-z} \quad (c2)$$

Aus (c1) und (c2) folgt: $\frac{T_z}{z} = \frac{\Delta T}{z + \Lambda \cdot (R-z)}$ (d)

Einsetzen von (d) in (c1) und mit Berücksichtigung von $dF = 2\pi r dr$ (aus Symmetriegründen)

ergibt: $\dot{q}_i = - \frac{\lambda_K \cdot 2\pi r dr \Delta T}{z + \Lambda (R-z)}$ (e)

Die Gleichungen (b) und (e) schließlich in (a) eingesetzt, ergibt:

$$\frac{\lambda_o^1}{\lambda_M} = 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\Lambda}{R} \cdot \int_0^R \frac{r dr}{z + \Lambda \cdot (R-z)}$$

und mit der Transformation: $w^2 = 1 - \frac{r^2}{R^2} = \frac{z^2}{R^2}$

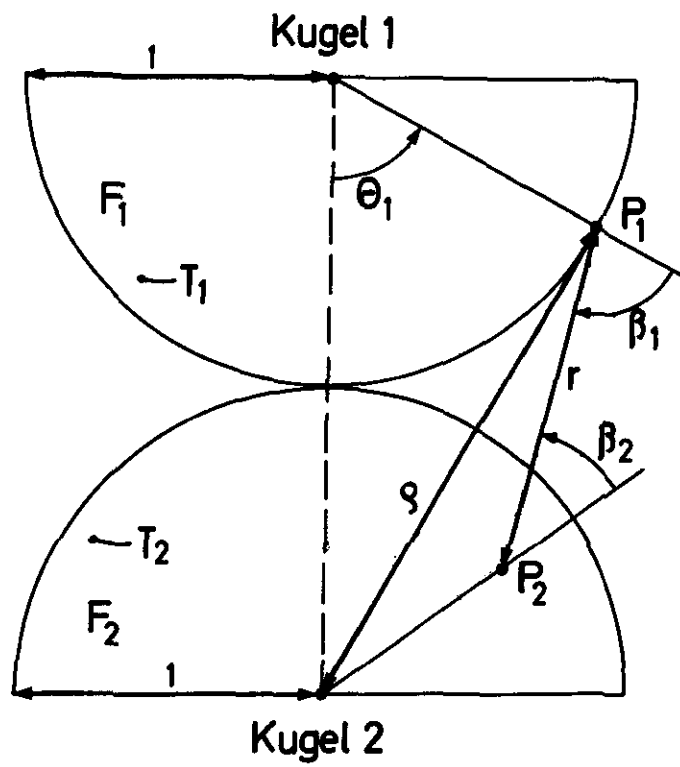
$$\lambda_o^1 / \lambda_M = 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{w dw}{1 - (\frac{\Lambda-1}{\Lambda})w}$$

Hieraus folgt nach Lösen des Integrals der gesuchte Ausdruck:

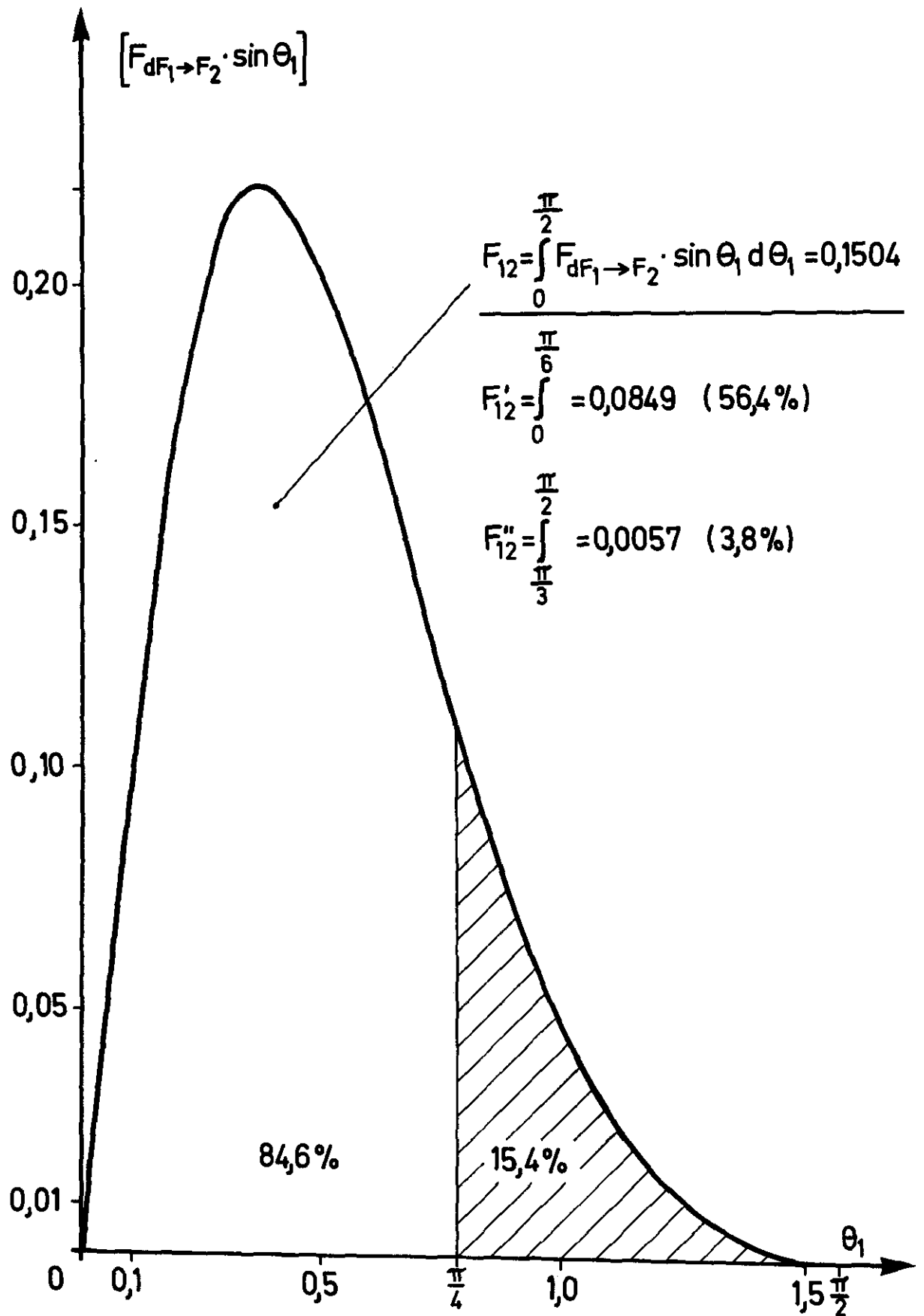
$$\frac{\lambda_o^1}{\lambda_M} = 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \frac{\Lambda}{\Lambda-1} \cdot \left[\frac{\Lambda}{\Lambda-1} \ln \Lambda - 1 \right] .$$

Bezeichnungen:

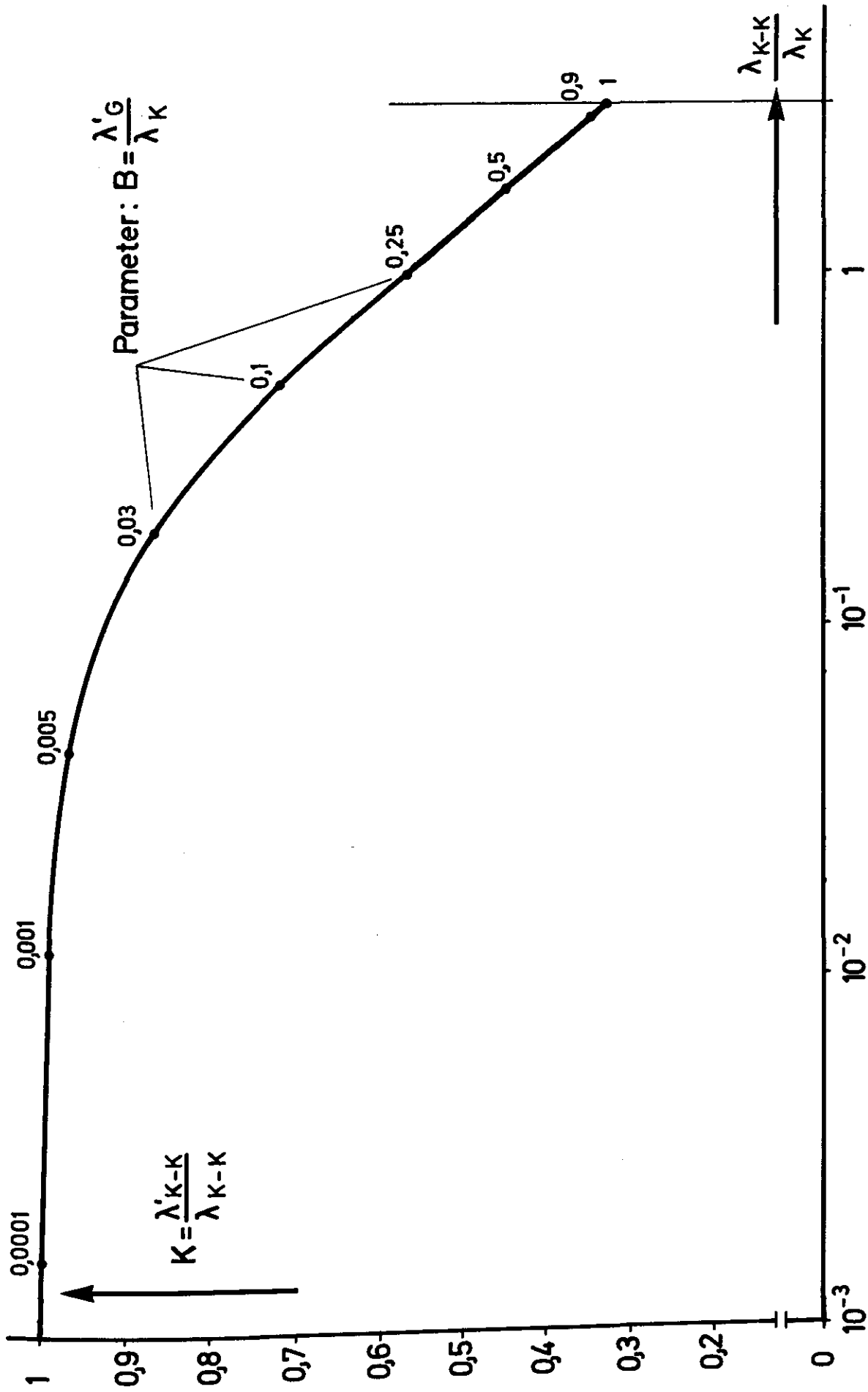
T ($^{\circ}\text{C}$)	:	Temperatur
\dot{Q} (W)	:	Wärmestrom
\dot{q} (W/cm^2)	:	Wärmestromdichte
λ ($\text{W}/\text{cm grad}$)	:	Wärmeleitfähigkeitskoeffizient
λ_K ($\text{W}/\text{cm grad}$)	:	Wärmeleitfähigkeitskoeffizient der Kugel
λ_M ($\text{W}/\text{cm grad}$)	:	Wärmeleitfähigkeitskoeffizient des Mediums
$\Lambda = \lambda_K/\lambda_M$:	Verhältnis der Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten von Kugel und Medium
p	:	Packungsdichte
$v = 1-p$:	Voidfaktor
ϵ	:	Emissionsvermögen
F_Z (cm^2)	:	Grundfläche der Einheitszelle
ϕ (cm)	:	Kugeldurchmesser
R (cm)	:	Kugelradius
σ ($\text{W}/\text{cm}^2\text{K}^4$)	:	Stefan-Boltzmann-Konstante
$F_{12} = F_{1\rightarrow 2}$:	Strahlungswinkelverhältnis (view factor)
N	:	Kugelberührungspunkte pro Einheitszelle
x, z	:	Ortskoordinaten
θ, ϕ	:	Winkel



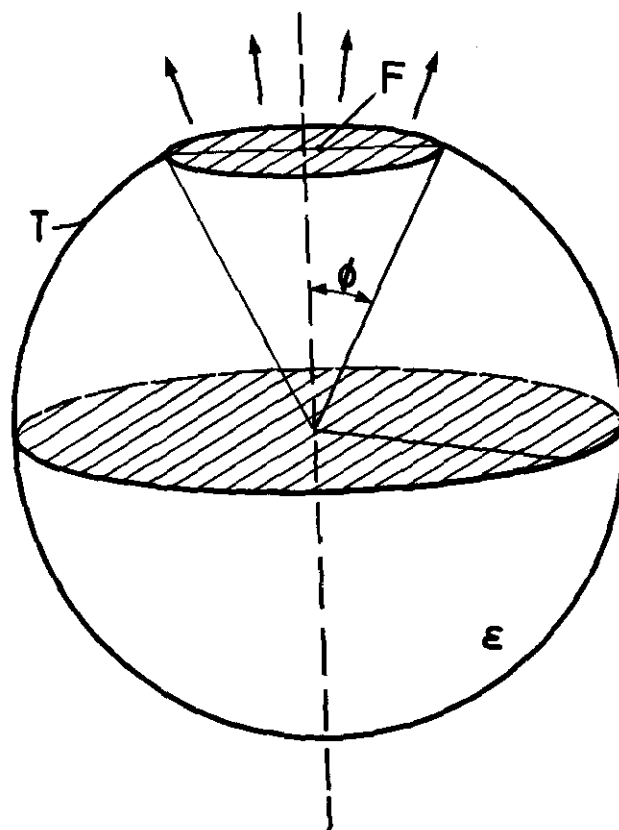
Figur 1: Strahlungsaustausch zwischen Kugel K_1 (Temperatur T_1) und Kugel 2 (Temperatur T_2)



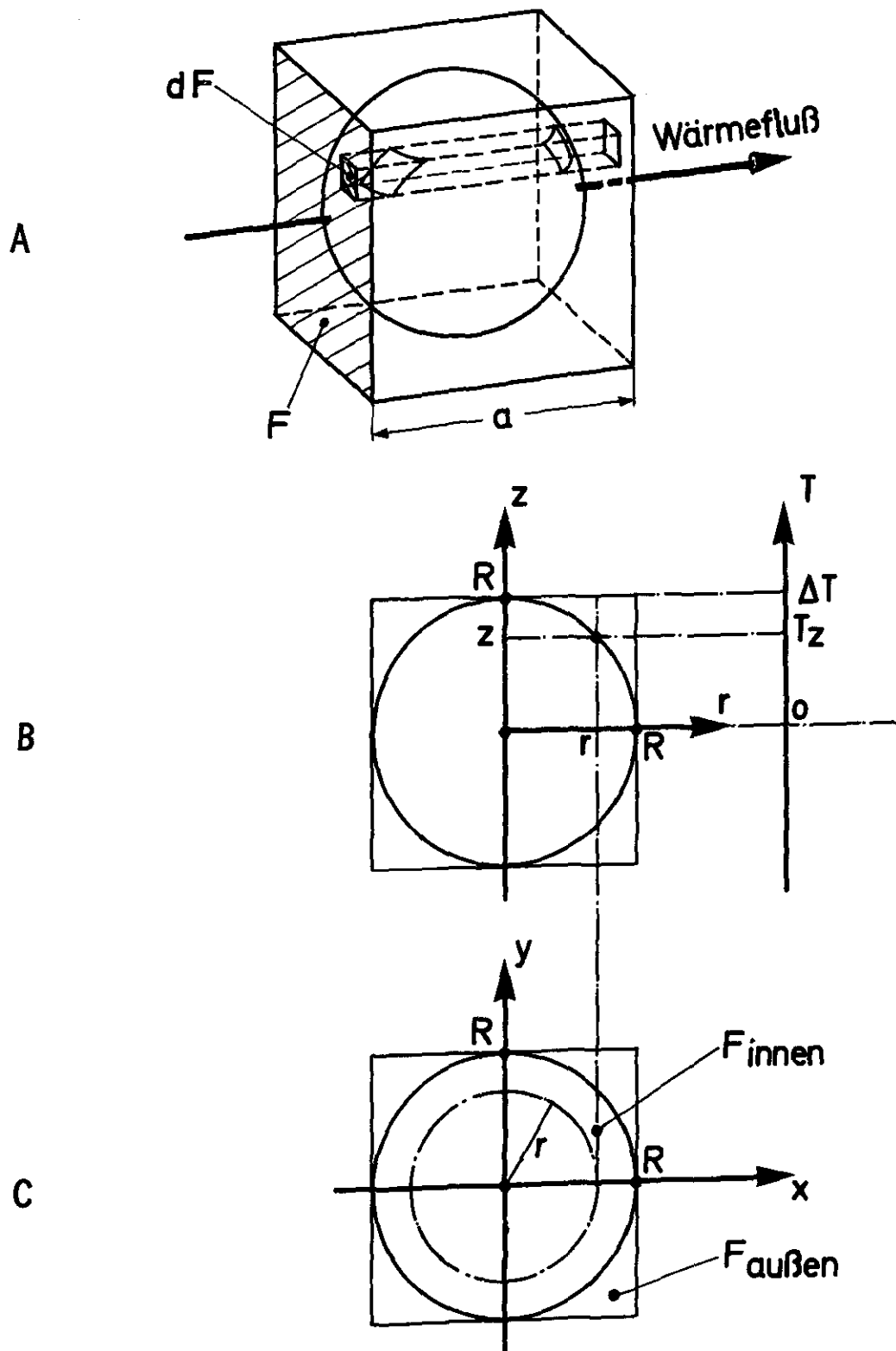
Figur 2: Strahlungswinkelverhältnis F_{12} zwischen 2 sich berührenden Kugeln



Figur 3: Korrekturfaktor $K = \frac{\lambda'_{K-K}}{\lambda_{K-K}}$ in Funktion von $\frac{\lambda_{K-K}}{\lambda_K}$



Figur 4: Wärmestrahlung aus einem Kugelhohlraum mit kreisförmiger Öffnung, (Wandtemperatur T , Emissionsvermögen ϵ)



Figur 5: Einheitszelle für die loseste Kugelpackung,
(A: Perspektivische Darstellung, B: Seitenriss, C: Grundriss)